

可微分多様体論におけるHausdorff性の役割と非Hausdorff多様体の幾何学

本稿では、可微分多様体（differentiable manifold）の基礎定義において通常仮定される**Hausdorff性**（Hausdorff property）に焦点を当て、この仮定が課されない場合に生じる幾何学的・解析学的困難を精密に検証する。さらに、Hausdorff性を満たさない空間が単なる病的な反例に留まらず、**葉層構造**（foliation）の葉の空間（leaf space）や力学系の軌道空間においていかに自然かつ不可避に現れるかを詳しく解説する。

1. 多様体の定義とHausdorff公理の基本的位置づけ

まず、議論の前提となる可微分多様体の定義を厳密に述べる。位相空間 M が n 次元可微分多様体であるとは、以下の条件を満たすことである：

- M は**局所ユークリッド空間**（locally Euclidean space）である。すなわち、任意の点 $p \in M$ に対して、 p の開近傍 U と n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の開集合 V への同相写像 $\phi: U \rightarrow V$ （これを局所座標近傍系または座標チャートと呼ぶ）が存在する。
- M を覆う座標チャートの集まり（アトラス）について、座標変換（coordinate transformation）写像がすべて C^∞ 級（無限回可微分）である。
- M は**第2可算公理**（second-countability axiom）を満たす。
- M は**Hausdorff空間**（Hausdorff space）である。

この節では、条件4の「Hausdorff性」を仮定しない場合に、多様体論の基礎構築において最初に直面する具体的な障害について分析する。

1.1. 点列の極限の一意性の喪失（微積分展開の崩壊）

Hausdorff空間の定義は、「異なる2点 $x, y \in M$ に対して、 $x \in U, y \in V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ を満たす開集合 U, V が存在する」というものである。これが成り立たない場合、解析学の根幹である点列の極限の一意性が失われる。

【証明/解説】

M を非Hausdorff空間とし、分離できない2点 $x, y \in M$ が存在すると仮定する。すなわち、 x の任意の開近傍 U と y の任意の開近傍 V は必ず交わる（ $U \cap V \neq \emptyset$ ）。

いま、 x の開近傍系（open neighborhood system）と y の開近傍系から、交わりから点を抽出して点列 $\{p_n\}$ を構成する。この点列は、定義により $n \rightarrow \infty$ のとき x にも収束し、同時に y にも収束する。したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = x \quad \text{かつ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = y \quad (x \neq y)$$

が成立し、極限が1点に定まらない。

可微分多様体上で微分法を展開する際、関数の方向微分や写像の微分係数は、曲線上の点列の極限、あるいは近傍上の割線傾きの極限として定義される。極限が一意でない空間では、関数の「導関数」や「微分係数」を一意に定義することが不可能になり、通常解析学が破綻する。

1.2. 対角集合が閉集合にならないことによる大域的判定の障害

一般の位相空間 M において、 M がHausdorff空間であることと、直積空間 $M \times M$ における**対角集合 (diagonal)**

$$\Delta = \{(x, x) \in M \times M \mid x \in M\}$$

が $M \times M$ の閉集合 (closed set) であることは同値である。非Hausdorff空間では Δ が閉集合にならないため、以下の基礎的な定理がすべて不成立となる。

- **連続写像の一致集合の閉性**：2つの連続写像 $f, g : N \rightarrow M$ が与えられたとき、それらが一致する点の集合 $\{s \in N \mid f(s) = g(s)\}$ は、写像 $(f, g) : N \rightarrow M \times M$ による対角集合 Δ の逆像にほかならない。 Δ が閉集合でなければ、この一致集合が閉集合である保証がなくなる。これにより、同相写像の一致性を局所から大域へ拡張する議論が不可能になる。
- **商空間のHausdorff性判定**：多様体 M にリー群 (Lie group) が作用するとき、その軌道空間 (orbit space) M/G が再び多様体になるための重要な条件の1つは、作用のグラフ $\{(x, g \cdot x) \in M \times M \mid x \in M, g \in G\}$ が閉集合であることである。 Δ の閉性が崩れる環境では、商多様体を構成する際の判定条件が極めて不透明になる。

1.3. コンパクト部分集合の閉性と「1の分割」の不成立

Hausdorff空間においては、「コンパクト (compact) 部分集合は必ず閉集合である」という基本定理がある。非Hausdorff空間では、コンパクト集合でありながら閉集合でない部分集合が存在し得る。

これがもたらす致命的な帰結が、多様体幾何学における最も強力な技術的道具である**1の分割 (partition of unity)** の存在定理の崩壊である。1の分割は、多様体全体を覆う開被覆に付随して定義される滑らかな関数の族であり、局所的な幾何学的構造 (例えば、局所座標近傍ごとに定義された内積や微分形式) を大域的に貼り合わせるために必須となる。

1の分割の構築ステップでは、「局所コンパクト (locally compact) なHausdorff空間において、開集合に含まれるコンパクト近傍の外側で完全に0になる滑らかな関数 (コンパクト台 (compact support) を持つ関数) を作る」という手順を要する。空間が非Hausdorffであると、コンパクト台の補集合 (関数が0でない点の閉包の補集合) が適切に開集合とならず、局所的な関数を滑らかに0へと接続するバンプ関数 (bump function) が作れなくなる。その結果、多様体全体へのリーマン計量 (Riemannian metric) の存在証明などが不可能となる。

【補足注意】

位相空間論における例外的な空間として、すべての開集合がクローブン（clopen; 開かつ閉）であるような空間や、**超不連結（extremally disconnected）**（任意の開集合の閉包が再び開集合になる位相空間）などが存在するが、これらは局所ユークリッド性を満たさないため、可微分多様体の文脈からは外れる。あくまで「局所的には \mathbb{R}^n と同相だが大域的にHausdorffでない」空間特有の困難がここで問題となる。

2. 基礎的な反例：「原点が2つある直線」の厳密な構成

Hausdorff性を除いた場合の不都合を明瞭に示す代表的な例が「**原点が2つある直線（line with two origins）**」である。この空間は、局所ユークリッド性と第2可算公理を満たすが、Hausdorff性を満たさない。

2.1. 空間の構成

2つの実数直線 $R_1 = \mathbb{R} \times \{a\}$ および $R_2 = \mathbb{R} \times \{b\}$ （ただし $a \neq b$ ）を用意する。これらの不連続和（disjoint union） $R_1 \sqcup R_2$ 上に次のような同値関係 \sim を導入する：

$$(x, a) \sim (y, b) \iff x = y \text{ かつ } x \neq 0$$

この同値関係による商空間 $M = (R_1 \sqcup R_2) / \sim$ を「**原点が2つある直線**」と呼ぶ。 $(0, a)$ の同値類を 0_a 、 $(0, b)$ の同値類を 0_b と表記する。 $x \neq 0$ の領域では、 (x, a) と (x, b) は同一視されて単一の点 x となる。

2.2. 特性の検証

- **局所ユークリッド性**： M の任意の点について、 0_a を含む近傍として $((-\epsilon, \epsilon) \times \{a\})$ の像を選べば、これは通常の開区間 $(-\epsilon, \epsilon)$ と同相である。 0_b についても同様である。原点以外の点も当然 \mathbb{R} の開区間と同相な近傍を持つ。したがって、 M は1次元可微分多様体のアトラスを持つ。
- **Hausdorff性の不成立**： 異なる2点 0_a と 0_b を考える。 0_a の任意の開近傍 U は、ある $\epsilon_1 > 0$ に対する $(-\epsilon_1, \epsilon_1)$ から 0_b を除いた部分（すなわち $x \neq 0$ の領域）を含む。同様に 0_b の任意の開近傍 V も、ある $\epsilon_2 > 0$ に対する $(-\epsilon_2, \epsilon_2)$ の原点以外の部分を含む。したがって、 $\min(\epsilon_1, \epsilon_2) = \delta$ とおくと、

$$U \cap V \supset (-\delta, 0) \cup (0, \delta) \neq \emptyset$$

となり、 0_a と 0_b を共通部分のない開集合で分離することができない。

3. 非Hausdorff可微分多様体における接空間の定義可能性

「空間が非Hausdorffであるとき、各点における**接空間（tangent space）**は定義できるか？」という問いに対

する答えは「完全に定義可能である」となる。

3.1. 接空間の局所性

接空間の定義は、本質的に**局所的 (local) な概念**である。点 $p \in M$ における接空間 $T_p M$ を定義する際、必要な情報は点 p の「いくらでも小さな開近傍」の内部の情報（およびそこでの可微分関数の振る舞い）だけであり、遠く離れた点が分離できるか否かという大域的な構造（Hausdorff性）は一切関与しない。

接空間の代表的な2つの定式化を用いて、Hausdorff性が不要であることを確認する。

① 曲線 (curve) の同値類による定義

点 $p \in M$ を通る滑らかな曲線（微分可能な写像） $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ （ただし $\gamma(0) = p$ ）を考える。 p のまわりの局所座標チャート (U, ϕ) を1つ固定すると、 $\phi \circ \gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ は通常のベクトル値関数となる。このときの $t = 0$ における速度ベクトル

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma(t)) \Big|_{t=0} \in \mathbb{R}^n$$

が一致する曲線同士を同一視し、その同値類（equivalence class）を接ベクトルと定義する。この議論において、 $\gamma(t)$ の像がチャート U の内部に収まる極小の時間区間 $(-\epsilon', \epsilon')$ だけを考えれば十分であるため、 M 全体のHausdorff性は影響を与えない。

② 微分作用素 (derivation) による定義

点 $p \in M$ の近傍で定義された C^∞ 級関数の芽 (germ) の空間を C_p^∞ とおく。 C_p^∞ 上の線形汎関数 $X: C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ が、任意の関数 $f, g \in C_p^\infty$ に対して以下のライプニッツ則 (Leibniz rule) を満たすとき、 X を点 p における微分作用素 (接ベクトル) と呼ぶ：

$$X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$$

関数の芽の定義自体が、 p の近傍の包含関係による帰納的極限 (inductive limit) として局所的に定義されるため、大域的な分離公理は不要である。したがって、非Hausdorff多元体であっても、各点 p には通常のユークリッド空間と同じ次元を持つベクトル空間 $T_p M \cong \mathbb{R}^n$ が一意に割り当てられる。

3.2. 接空間が定義された後に生じる大域的困難

各点での接空間 $T_p M$ は定義できるが、それらを足し合わせて**接束 (tangent bundle) $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$** を構成すると、底空間 M の非Hausdorff性が引き継がれ、 TM もまた非Hausdorffな可微分多様体となる。

これにより、多様体上のベクトル場 (vector field) が誘導する常微分方程式の解の動的挙動に、以下に述べるような深刻な破綻が生じる。

4. 葉層構造の幾何学と非Hausdorff多様体の自然な発現

非Hausdorff多様体は、単に人工的な反例として作られるだけでなく、幾何学や力学系（dynamical system）の交差点である**葉層構造（foliation）**の理論において、必然的かつ自然な対象として登場する。

4.1. 葉層構造と「葉の空間」の定義

n 次元多様体 M 上の k 次元**葉層構造（foliation）** \mathcal{F} とは、 M を k 次元の滑らかな部分多様体の局所的な集まりへ分解する構造である。これら個々の部分多様体を**葉（leaf）**と呼ぶ。

多様体 M の点 x, y に対して、「 x と y が同じ葉 $L \in \mathcal{F}$ に属する」という関係は同値関係（equivalence relation）を定める。この同値関係による商空間（quotient space）

$$\mathcal{M} = M / \sim$$

を「**葉の空間（leaf space）**」と呼ぶ。これは、各々の葉を1つの「点」に押し潰して得られる空間である。元の多様体 M が完全なHausdorff空間であっても、商空間である葉の空間 \mathcal{M} は極めて容易に非Hausdorff空間となる。

4.2. 原点を抜いた平面の葉層構造（具体的メカニズム）

「原点が2つある直線」が幾何学から自然に誘導される一例を示す。

元の多様体として、2次元ユークリッド平面から原点を除いたHausdorff多様体 $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ を考える。この M 上に、通常の水線（ $y = \text{constant}$ ）の制限によって葉層構造 \mathcal{F} を定める。このとき、各々の葉 L は以下の2種類に分類される：

- $y = c \neq 0$ のとき：葉 $L_c = \{(x, c) \mid x \in \mathbb{R}\}$ は、途切れることのない1本の直線である。
- $y = 0$ のとき：本来であれば1本の直線となるはずの $y = 0$ のラインから原点 $(0, 0)$ が取り除かれているため、このラインは以下の2つの独立した葉に分断される。

$$L_0^- = \{(x, 0) \mid x < 0\}, \quad L_0^+ = \{(x, 0) \mid x > 0\}$$

この葉層構造の「葉の空間」 $\mathcal{M} = M / \sim$ を構築すると、 $y \neq 0$ の各直線はそれぞれ1点に対応し、 $y = 0$ の高さにおいては2つの異なる点 $[L_0^-]$ と $[L_0^+]$ が対応することになる。この位相を商位相（quotient topology）として精密に計算すると、まさに「原点が2つある直線」そのものが得られる。

4.3. ベクトル場の積分曲線の分岐とその幾何学的・力学系的解釈

この葉の空間 \mathcal{M} 上で、常に上を向く（ y 軸正の方向への）滑らかなベクトル場 $X = \frac{\partial}{\partial y}$ を考える。

通常Hausdorff多様体上であれば、ピカル・リンデレフの定理（Picard–Lindelöf theorem）により、与えられた初期値を通る常微分方程式の解（積分曲線またはフロー）は局所的に一意に定まる。しかし、非Hausdorff空間 \mathcal{M} 上ではこの一意性が崩壊し、「**積分曲線の分岐（branching of integral curves）**」が発生する。

葉の空間 M の下側 ($y < 0$ の領域) から出発して上へと進む積分曲線を考える。この曲線が $y \rightarrow 0$ と接近したとき、極限となる点 (未来の行き先) として、 $[L_0^-]$ (左側の原点) へ向かうことも、 $[L_0^+]$ (右側の原点) へ向かうことも可能である。なぜなら、位相幾何学的にこの2つの点は分離できないからである。

この非決定論的な「分岐現象」は、病的な欠陥ではなく、元の2次元空間 $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ における力学系の大域的なトポロジーを完全に写し取っている。

- 元の空間 M において、 $y < 0$ の領域から上向きに流れる流体を想定する。
- この流れは、原点 $(0,0)$ という「欠損 (障害物)」に直面した際、それを左側に避けて通るルート ($x < 0$ の領域を経由) と、右側に避けて通るルート ($x > 0$ の領域を経由) に物理的に分岐する。
- 大域的な軌道の情報を集約した「葉の空間」においては、障害物を左右どちらに避けるかという元の空間での大域的な選択の自由度が、空間自体の非Hausdorff性と、それに伴う「積分曲線のルート分岐」として見事に翻訳されている。

このように、非Hausdorff多様体は、複雑な幾何学的構造や力学系の軌道の総体を、空間そのもののトポロジカルな性質としてコンパクトに表現するための、極めて自然で強力なフレームワークを提供しているのである。

5. 参考文献

本稿で展開した多様体論の基礎、Hausdorff性の役割、および葉層構造の基本概念については、以下の文献を参照されたい。

- 松島 与三 著, 『多様体入門』, 裳華房. (微分幾何学における多様体の基礎的定義とHausdorff性・第2可算公理の標準的解説)
[裳華房『多様体入門』詳細ページ](#)
- John M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer. (Hausdorff公理を要する理由、1の分割の厳密な構成、および接空間の局所性に関する現代的な標準教科書)
[Springer: Introduction to Smooth Manifolds](#)
- Lawrence Conlon, *Differentiable Manifolds*, Birkhäuser. (非Hausdorff多様体の具体例としての「原点が2つある直線」および葉層構造への導入・葉の空間の商位相に関する優れた解説)
[Springer: Differentiable Manifolds](#)
- I. Moerdijk and J. Mrčun, *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press. (葉層構造の葉の空間が非Hausdorff多様体や軌道体 (orbifold)、さらには群oid (groupoid) へと導かれる現代幾何学の進展に関する専門書)
[Cambridge University Press: Introduction to Foliations and Lie Groupoids](#)